

Ce projet s'intéresse à une représentation originale des matrices. Ces matrices s'écrivent sous la forme suivante:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

où $M_1 \dots M_k$ sont autant de matrices carrées. On remarquera dans un premier temps que toute matrice peut s'écrire sous cette forme, en choisissant $k = 1$. On appellera représentation la plus étroite l'écriture d'une matrice sous une telle forme avec k le plus grand possible. Dans le cas d'une matrice diagonale, on remarquera en particulier que la représentation la plus étroite est telle que $k = n$ où n est la taille de la matrice originelle.

L'objectif de ce projet est de trouver dans des cas simples des moyens de calculer automatiquement des bases des noyaux et images des matrices considérées.

Question 1)

Programmer une fonction qui transforme une matrice carrée quelconque en sa représentation la plus étroite possible. Cette représentation sera implémentée sous la forme d'une liste de matrices carrées correspondant aux matrices $M_1 \dots M_k$.

Question 2)

Dans le cas où la matrice est diagonale, proposer un algorithme qui trouve une base de l'image et du noyau de la matrice.

Question 3)

Adapter votre algorithme au cas où aucune des matrices carrées internes ne fait plus qu'une taille 2. On pourra utiliser pour ça le déterminant.

Question 4)

Même question pour la taille 3. Et pour une taille quelconque ?

Question 5)

Chercher des algorithmes qui traitent le cas général par une autre méthode. Comparer les performances des algorithmes dans des cas judicieusement choisis. Expliquer les résultats.

Question 6)

Ouverture: Chercher d'autres méthodes de calcul de ces bases, chercher à piéger les algorithmes par erreurs d'arrondis, trouver une représentation plus large de matrices qui permette d'avoir aussi ces optimisations.