On s'intéresse ici à des matrices de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$. Ces matrices sont telles que leurs colonnes c_1, c_2, c_3 sont orthogonales:

$$\forall i, j, \sum_{k=1}^{3} c_{ik} c_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 1)

Proposer un algorithme qui génère aléatoirement des matrices qui vérifient cette propriété.

Question 2)

Calculer sur un grand nombre d'exemples le produits $M \times M^t$, où M est une matrice vérifiant la propriété. Qu'est-ce que cela semble indiquer ?

Question 3)

On admettra que ces matrices correspondent toutes à des transformations géométriques simples. Ces transformations peuvent être connues à partir du noyau de $M - Id$. Si ce noyau est de dimension nulle alors c'est une symétrie centrale. S'il est de dimension 1, alors c'est une rotation autour d'un axe. S'il est de dimension 2, alors c'est une symmètrie par rapport à un plan. Si enfin il est de dimension 3 alors c'est trivialement l'identité. Proposer un algorithme simple, basé sur le cour, qui calcule une base orthogonale du noyau de $M - Id$.

Question 4)

Proposer un algorithme qui complète la base orthogonale trouvée en une base de tout $\mathbb{R}^3$ toujours orthogonale. Expliquer à quoi correspondent ces vecteurs de la base obtenue du point de vue des transformations géométriques.

Question 5)

Proposer une représentation graphique de ces ensembles: l'utilisateur peut rentrer une matrice, le programme affiche alors la droite ou le plan qui définit le noyau et la droite ou le plan orthogonal qui définit le reste de la base. Si l'utilisateur rentre une matrice telle que le noyau de $M - Id$ est nul ou tout l'espace, alors le programme pourra simplement le lui faire remarquer sans tenter d'afficher quoi que ce soit.

Question 6)

Ouverture: calculer l'angle des rotations, regarder comment les matrices générées aléatoirement se répartissent entre les différentes transformations...